manavee 数学 IA の重要テーマの総ざらい

第 3 回二次関数

テーマ[二次関数の最大最小][解の配置]

解説問題

aを定数とし、xの二次関数$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4$・・・①のグラフを$G$とする。

(1) グラフGの頂点を求めよ

(2) グラフGがx軸と異なる 2 点で交わるときaの範囲を求めよ。
　さらにこの 2 つの交点がともにx軸の負の部分にあるとき、aの範囲を求めよ。

(3) グラフGの頂点のx座標が 3 以上 7 以下の範囲にあるとする。
　このとき、二次関数①の$3 \leqq x \leqq 7$における最大値Mを求めよ。
　さらに最小値が 6 の時の最大値Mの値を求めよ。

(センター試験 2007 年改題)

※以下、試験問題です。解答は各自確認してください。すべてセンター試験です。

試験問題

[1]センター試験 2007 年第二問

a を定数とし，x の 2 次関数 $y=x^2-2(a-1)x+2a^2-8a+4$ ……①のグラフを G とする。

(1)　グラフ G が表す放物線の頂点の座標は，$\left(a-\boxed{\text{ア}},\ a^2-\boxed{\text{イ}}a+\boxed{\text{ウ}}\right)$ である。グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるのは

$$\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}<a<\boxed{\text{エ}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

のときである。さらに，この 2 つの交点がともに x 軸の負の部分にあるのは

$$\boxed{\text{カ}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}<a<\boxed{\text{ク}}-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

(2)　グラフ G が表す放物線の頂点の x 座標が 3 以上 7 以下の範囲にあるとする。

このとき，a の値の範囲は，$\boxed{\text{コ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{サ}}$ であり，2 次関数①の $3\leqq x\leqq 7$ における最大値 M は

$\boxed{\text{コ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{シ}}$ のとき，$M=\boxed{\text{ス}}a^2-\boxed{\text{セソ}}a+\boxed{\text{タチ}}$

$\boxed{\text{シ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{サ}}$ のとき，$M=\boxed{\text{ツ}}a^2-\boxed{\text{テト}}a+\boxed{\text{ナニ}}$

である。

したがって，2 次関数①の $3\leqq x\leqq 7$ における最小値が 6 であるならば

$$a=\boxed{\text{ヌ}}+\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

であり，最大値 M は，$M=\boxed{\text{ハヒ}}-\boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

[2]センター試験 2011 年第二問

a, b, c を定数とし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする。x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \cdots\cdots\cdots①$$

のグラフを G とする。G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき

$$a = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}} \cdots\cdots\cdots②$$

となる。さらに，G が点 $(1,\ 2b-1)$ を通るとき

$$c = b - \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}} \cdots\cdots\cdots③$$

が成り立つ。

以下，②，③のとき，2 次関数①とそのグラフ G を考える。

(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}, \quad \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}} < b$$

である。さらに，G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} < b < \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

である。

(2) $b > 0$ とする。

$0 \leqq x \leqq b$ における 2 次関数①の最小値が $-\frac{1}{4}$ であるとき，$b = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ である。

一方，$x \geqq b$ における 2 次関数①の最大値が 3 であるとき，$b = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

$b = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$，$b = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ のときの①のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。G_1 を x 軸方向に $\boxed{テ}$，y 軸方向に $\boxed{ト}$ だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。

[3]センター試験 2009 年第二問

a を定数とし，x の 2 次関数 $y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$ ……①のグラフを G とする。グラフ G の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(a+\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}}a^2+\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オ}}\right)$$

である。

(1) グラフ G が x 軸と接するのは

$$a=\frac{\boxed{\text{カ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

のときである。

(2) 関数①の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値を m とする。

$m=\boxed{\text{イウ}}a^2+\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オ}}$ となるのは，$\boxed{\text{ケコ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{サ}}$ のときである。

また

$a<\boxed{\text{ケコ}}$ のとき $m=\boxed{\text{シス}}a+\boxed{\text{セ}}$

$\boxed{\text{サ}}<a$ のとき $m=\boxed{\text{ソタ}}a+\boxed{\text{チ}}$

である。したがって，$m=\dfrac{7}{9}$ となるのは

$$a=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\quad \frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

のときである。